

# ナンバープレースの解法アルゴリズムと ミニモデルの分析

平松 敏 祐

コンピュータを使用してナンバープレースの問題を解くためのアルゴリズムを二種類（アルゴリズムHとC）考案し、そのアルゴリズムに基づいてプログラムを開発した。さらにナンバープレースのミニモデル（ $4 \times 4$ の配列）を対象に、そのすべての解を二種類の手法〔①論理的な解析と、②しらみつぶし法を用いたプログラム〕により求めたところ、ともに288種類の解の存在が確認された。得られた288種類の解を、回転と反転、反転後の回転により分析したところ、1つの解からその解を含めて8個の解が派生するグループ（33種類）と4個の解が派生するグループ（6種類）の二つに大別された。1つの解から派生する解の数が8個と4個と異なるのは、後者のグループに属する解が、 $4 \times 4$ の配列の中心点において点対称の特性をもつためであることが明らかにされた。

keywords : number place, game programming, C-language, algorithm, enumeration

## 1. はじめに

情報の研究分野の一つに「ゲーム情報学」あるいは「ゲームプログラミング」がある。文字通り、各種のゲームやパズルをコンピュータにより解析したり、実用的なゲームソフトウェアを開発したりする。ここでは数多くのゲームやパズルの中から、「ナンバープレース」<sup>(1)~(4)</sup> (Number Place, 以下NPと略記。数独とも呼ばれる)を取り上げ解析の対象とする。

一般的なNPは配列の大きさが $9 \times 9$ の中の数値が定まっていないセルを対象に、その行（9行）、列（9列）および小ブロック（各 $3 \times 3$ の配列9個からなる）各々に1から9の数値を重複なく配置するパズルである。一般的に空白のセルの数が増える程、問題の難易度が上がる。

通常NPの問題における解は1つだけである。それに対して、 $9 \times 9$ の配列で指定された数値の部分を空白に置き換えていくと、複数の解が派生するようになる。極端な例として、拘束条件の存在しない $9 \times 9$ のセルがすべて空白であるNPパズルの解をすべて求めておくと、NP問題の創作や解の検証に有効である。このような配置可能な解をすべて求める問題には、コンピュータの利用が不可欠となる。

## 2. 二種類のアルゴリズム

NPには $9 \times 9$ より大きな配列や特殊な形状をしたものも見られるが、ここでは $9 \times 9$ の配列を対象としたいいわゆるノーマルNPの解法について考える。このパズルは手作業で解くのが一般的だが、手作業では解くことが困難な問題に対応するためコンピュータを用いてNPの問題を解く手順をアルゴリズムとして表現し、そのアルゴリズムに基づいて解法プログラムを作成することにした。このために二種類のアルゴリズムを考案した<sup>6)</sup>。一つは人間と同様の思考プロセスによって解を求めるアルゴリズム (以下アルゴリズムHと表記)、もう一つは計算機の繰返し機能を活用した「しらみつぶし手法」を用いて解を求めるアルゴリズム (以下アルゴリズムCと表記) である。

### 2. 1 アルゴリズムH

人と同等の思考手順を用いて探索するアルゴリズムHは、H1からH7に示す7ステップからなる。

H1 : 対象とする問題をファイルから読み初期値を設定する。

H2 : 読みこんだ問題の誤りをチェックする。誤りがなければH3に進む。誤りが見つければ原因となる数字とその場所を出力し終了する。誤りチェックは同一の行、列、小ブロック内に同じ数字が重複して存在するか否か、さらに数値が0から9 (0はセルの値が未定の数値を示す) の範囲内にあるかどうかである。

H3 : 値が未定のセルの個数を数える。個数が0なら結果を出力して終了する。値が未定のセルが1個以上あればH4に進む。

H4 : つぎの①と②に示す手順を用い値が未定のセルの値を決定する。この手順によりセルの値が一つでも決定できたらH3に戻る。変化がなければH5に進む。

①つぎの(a)と(b)の場合に1から9の中の使用されていない値を値が未定のセルの値として決定する。

(a) 同一の行、列、小ブロック中に値0のセルが1ヶ所しかない場合。

(b) 値0のセルが存在する行、列、小ブロックのどこかで1から9の中の8個の数値が使用されている場合。

②値が確定している1から9の数ごとにその数値が存在しえないセルをマークする。マーキングの結果、同一の行、列、小ブロックにおいて、値が未定のセルが1個しか存在しないとき、そのセルの値をマーキングの対象とした値とする (以下この手法をマーキング法と呼ぶ)。

H5 : 値が未定のすべてのセルを対象に、設定の可能性のある1から9の数値とその個数をリストアップする。

H6 : 値が未定のセルごとに、H5でリストアップされた設定の可能性のある数値の候補数を調べ、その個数が1個であれば、その候補値をそのセルの値とする。ここで決定できたセルの個数が1以上であればH3に戻る。何も決定できなければH7に進む。

H7 : H5 でリストアップした候補数を絞り込む。絞り込みには、つぎの①論理的推論と②背理法を併用する。

①論理的推論：小ブロック（ $3 \times 3$ ）の中で2個または3個の同一の候補値が同一の行または列だけに存在する場合、その行あるいはその列の延長線上に存在する同じ値の候補値を消去する（以下この手法を串刺し法と呼ぶ）。9個の小ブロックについて串刺し法により1ヶ所でも候補値を削除できたらH6に戻る。変化がなければつぎの背理法に進む。

②背理法：最初に現在の状態を保存する。つぎに値が未定のセルの候補の一つを正しいと仮定しそのセルの値として設定した後、H3に戻り探索を続ける。探索の結果、未定のセルがすべて確定できたら、その結果を出力して終了する。矛盾が生じたら（同一の行、列、小ブロックに同じ数値が複数存在する）仮定した数値が誤りなので、最初に保存しておいた状態に復元し、仮に設定した数値を候補から削除する。矛盾を発見できないまま探索が途中で停止した場合には、仮定した値はそのまま未定として扱い、保存しておいた元の状態に戻し、他の候補値について同様の処理を繰り返す。この処理を値が未定のすべてのセルについて実行する。その結果、1箇所でも候補値が削除できたらH6に戻る。串刺し法と背理法を用いても変化が見られないときは「解法不能」と出力して探索を終了する。

## 2. 2 アルゴリズムC

アルゴリズムCは、C1からC5の5ステップからなる。ここではフルモデル（ $9 \times 9$ の配列）を例にその解法アルゴリズムの概要を述べる。しらみつぶし手法を用いているため、もし問題に複数の解が存在するなら、すべての解を求めることが可能である。なおアルゴリズムCについては、アルゴリズムの正当性を手軽にしかも短時間で確認するために、フルモデル（ $9 \times 9$ の配列）を対象とする前にミニモデル（ $4 \times 4$ の配列、図1参照）を用いて検証した。

C1 : 問題をファイルから読み初期値を設定する。

C2 : 問題の誤りの有無をチェック（チェック内容はアルゴリズムHのH2と同じ）する。

C3 : 値が未定のセルの値をH4で述べた手法を用いて決定し、しらみつぶし探索の数をできるだけ減らす。

C4 : 値が未定のセルを対象に、設定の可能性のあるすべての数値（1から9）とその個数をH5およびH6と同じ手法を用いてリストアップし確定する。

C5 :  $9 \times 9$ の配列の先頭から順に値が未定のセルの候補値について、そのセル位置での拘束条件（同一の行、列、小ブロック中に同じ数字は存在しない）を考慮しながら、すべての候補値について、配置可能な数値をしらみつぶし的に探索する。拘束条件を満たす解が求まったらその内容を出力し、つぎの解を探す。すべての組合せについての探索を終了したら実行を停止する。

### 3. ミニNPモデルの解の総数

NPのフルモデルとでもいべき(9×9)の解の総数は膨大で、総ての解を求めるには多くの計算時間が必要となる。そこで、NP(9×9)のすべての解を求める前段階として、NPの配列のサイズを(9×9)から(4×4)に縮小したNPのミニモデル(以下、ミニNPモデルと略記)を導入し、その総ての解を求めることにする。ミニNPモデルは4×4の配列を対象に、その行(4行)、列(4列)および小ブロック(各2×2の配列4個からなる)各々に1から4の数值を重複なく配置するパズルである。ミニNPモデル(4×4)のすべての解を論理的な手法とプログラムの二種類の方法を用いて生成し、その特性をコンピュータを用いて調べることにした。以下にその解析結果について述べる。

#### 3. 1 論理的な手法によるミニNPモデルの解の総数の推定

ミニNPモデル(4×4)は図1に示すように、4つの小ブロック:A(左上)、B(右上)、C(左下)、D(右下)が集まって一つの解が形成される。4つの小ブロック:A、B、C、Dは、各々2×2の配列からなり、2×2の配列に1から4の数值が重複なく配置される。2×2の配列への1から4の数值の並べ方は、24通り( ${}_4P_2 = 4!$ )である。図2に、24通りの数值の並べ方を各配列の右上に示した通番とともに示す。1から4の数值の24通りの並べ方が4つの小ブロック:A、B、C、Dの24種類のパーツ(2×2)として利用される。

A	B
C	D

図1 ミニNPモデル(4×4)

図1において、A(左上)の位置には何等制約がないため、図2に示す24種類のパーツのいずれか1つが配置できる。例えばAの位置に、図2の1番に示すパーツを置くと仮定する。するとAの上段には数值1と2が存在するので、Aの右側、すなわちBの位置には上段が3と4(図2のパーツ番号の17と18)あるいは、4と3(図2のパーツ番号の23と24)の合計4種類のパーツだけが配置できる。同様にAの下に位置するCには、Aの左側に

1 1 2 3 4	2 1 2 4 3	3 1 3 2 4	4 1 3 4 2	5 1 4 2 3	6 1 4 3 2
7 2 1 3 4	8 2 1 4 3	9 2 3 1 4	10 2 3 4 1	11 2 4 1 3	12 2 4 3 1
13 3 1 2 4	14 3 1 4 2	15 3 2 1 4	16 3 2 4 1	17 3 4 1 2	18 3 4 2 1
19 4 1 2 3	20 4 1 3 2	21 4 2 1 3	22 4 2 3 1	23 4 3 1 2	24 4 3 2 1

図2 ミニNPモデルの24種類のパーツ(2×2)

数值1と3が存在するので、左側が2と4(図2のパーツ番号の8と10)あるいは4と2(図2のパーツ番号の19と24)の合計4種類のパーツだけが配置可能である。Bの位置に4種類、Cの位置に4種類なので、位置Aに配置可能な24のパーツごとに、16通りの組み合わせが考えられる。最後のDの位置に配置可能なパーツは、BとCの位置に配置されたパーツの制約を受けるため、24種類のパーツ中の一つに限定される。さらにNPの規則(同じ行あるいは列には同じ数字を重複して配置できない)によりBとCとの16種類の組み合わせの中

の4種類については、パーツの配置が不可能となる。この制約は位置Aに配置可能な24種類のパーツすべてについて成立する。この制約の検証は、24種類のパーツすべてについて紙上で実際に検証を行い確認した。したがってミニNPモデルの解の総数は、 $24 \times (16 - 4) \times 1 = 288$ 通りとなる。

### 3. 2 しらみつぶし法によるミニNPモデルの解の生成

ミニNPモデル ( $4 \times 4$ ) のすべての解を、C言語で記述したプログラムにより生成した。解の生成に使用したアルゴリズムは、しらみつぶし法である。生成された解の総数は前に述べた論理的な解の総数と同じ288個で、その結果を図3-1と図3-2に示す。NPの規則 (横4行、縦4列、 $2 \times 2$ のブロック4個のいずれにも1から4の数値を配置するが、同じ数字を重複して配置できない) の下で、 $4 \times 4$ の配列における16個のセルについて、1から4の数値のすべての組み合わせを考慮して求めた結果である。図3-1と図3-2に示すように各解の右上には1から288の通番を付加してある。例えば一番目に示した解の最上段の数値は「1 2 3 4」、2段目は「3 4 1 2」、3段目は「2 1 4 3」、4段目は「4 3 2 1」である。最後に示した288番目の解の最上段の数値は「4 3 2 1」、2段目は「2 1 4 3」、3段目は「3 4 1 2」、4段目は「1 2 3 4」である。

### 4. ミニモデルの解の分析

ミニNPモデル ( $4 \times 4$ ) は正方形をしている。このため1つの解を時計回りあるいは反時計回りに $90^\circ$ 回転すると、別の解が得られる。さらに上下あるいは左右に $180^\circ$ 反転 (裏返し) しても別の解が求められる。この性質を利用して、回転で得られる4種類の解と、反転後の回転によって得られる4種類の合計8種類の解の相互関係を、C言語で記述したプログラムにより解析した。その結果を図4に示す。



145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156
3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4
2 4 1 3	2 4 1 3	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 3 1	2 4 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 3 1	4 2 3 1
1 3 4 2	4 2 3 1	1 2 4 3	1 3 4 2	4 2 1 3	4 3 1 2	1 3 4 2	1 4 3 2	2 3 4 1	2 4 3 1	1 3 4 2	2 4 1 3
4 2 3 1	1 3 4 2	4 3 1 2	4 2 1 3	1 3 4 2	1 2 4 3	2 4 3 1	2 3 4 1	1 4 3 2	1 3 4 2	2 4 1 3	1 3 4 2
157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168
3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2
2 4 1 3	2 4 1 3	2 4 1 3	2 4 1 3	2 4 3 1	2 4 3 1	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1
1 2 3 4	1 3 2 4	4 2 3 1	4 3 2 1	1 3 2 4	4 2 1 3	1 3 2 4	2 4 3 1	1 3 2 4	1 4 2 3	2 3 1 4	2 4 1 3
4 3 2 1	4 2 3 1	1 3 2 4	1 2 3 4	4 2 1 3	1 3 2 4	2 4 3 1	1 3 2 4	2 4 1 3	2 3 1 4	1 4 2 3	1 3 2 4
169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4
1 4 2 3	1 4 2 3	1 4 3 2	1 4 3 2	1 4 3 2	1 4 3 2	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 3 2	4 1 3 2
2 3 4 1	4 1 3 2	2 1 4 3	2 3 4 1	4 1 2 3	4 3 2 1	1 3 4 2	1 4 3 2	2 3 4 1	2 4 3 1	1 4 2 3	2 3 4 1
4 1 3 2	2 3 4 1	4 3 2 1	4 1 2 3	2 3 4 1	2 1 4 3	2 4 3 1	2 3 4 1	1 4 3 2	1 3 4 2	2 3 4 1	1 4 2 3
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1
1 4 2 3	1 4 2 3	1 4 2 3	1 4 2 3	1 4 3 2	1 4 3 2	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2
2 1 3 4	2 3 1 4	4 1 3 2	4 3 1 2	2 3 1 4	4 1 2 3	1 4 3 2	2 3 1 4	1 3 2 4	1 4 2 3	2 3 1 4	2 4 1 3
4 3 1 2	4 1 3 2	2 3 1 4	2 1 3 4	4 1 2 3	2 3 1 4	2 3 1 4	2 3 1 4	1 4 3 2	2 4 1 3	2 3 1 4	1 4 2 3
193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204
3 4 1 2	3 4 1 2	3 4 1 2	3 4 1 2	3 4 1 2	3 4 1 2	3 4 1 2	3 4 1 2	3 4 1 2	3 4 1 2	3 4 1 2	3 4 1 2
1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 4 3	1 2 4 3	2 1 3 4	2 1 3 4	2 1 4 3	2 1 4 3	2 1 4 3	2 1 4 3
2 1 4 3	2 3 4 1	4 1 2 3	4 3 2 1	2 1 3 4	4 3 2 1	1 2 4 3	4 3 2 1	1 2 3 4	1 3 2 4	4 2 3 1	4 3 2 1
4 3 2 1	4 1 2 3	2 3 4 1	2 1 4 3	4 3 2 1	2 1 3 4	4 3 2 1	1 2 4 3	4 3 2 1	4 2 3 1	1 3 2 4	1 2 3 4
205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216
3 4 2 1	3 4 2 1	3 4 2 1	3 4 2 1	3 4 2 1	3 4 2 1	3 4 2 1	3 4 2 1	3 4 2 1	3 4 2 1	3 4 2 1	3 4 2 1
1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 4 3	1 2 4 3	1 2 4 3	1 2 4 3	2 1 3 4	2 1 3 4	2 1 3 4	2 1 3 4	2 1 4 3	2 1 4 3
2 1 4 3	4 3 1 2	2 1 3 4	2 3 1 4	4 1 3 2	4 3 1 2	1 2 4 3	1 3 4 2	4 2 1 3	4 3 1 2	1 2 3 4	4 3 1 2
4 3 1 2	2 1 4 3	4 3 1 2	4 1 3 2	2 3 1 4	2 1 3 4	4 3 1 2	4 2 1 3	1 3 4 2	1 2 4 3	4 3 1 2	1 2 3 4
217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228
4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3	4 1 2 3
2 3 1 4	2 3 1 4	2 3 4 1	2 3 4 1	2 3 4 1	2 3 4 1	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 4 1	3 2 4 1
1 4 3 2	3 2 4 1	1 2 3 4	1 4 3 2	3 2 1 4	3 4 1 2	1 3 4 2	1 4 3 2	2 3 4 1	2 4 3 1	1 4 3 2	2 3 1 4
3 2 4 1	1 4 3 2	3 4 1 2	3 2 1 4	1 4 3 2	1 2 3 4	2 4 3 1	2 3 4 1	1 4 3 2	1 3 4 2	2 3 1 4	1 4 3 2
229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2	4 1 3 2
2 3 1 4	2 3 1 4	2 3 1 4	2 3 1 4	2 3 4 1	2 3 4 1	3 2 1 4	3 2 1 4	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1	3 2 4 1
1 2 4 3	1 4 2 3	3 2 4 1	3 4 2 1	1 4 2 3	3 2 1 4	1 4 2 3	2 3 4 1	1 3 2 4	1 4 2 3	2 3 1 4	2 4 1 3
3 4 2 1	3 2 4 1	1 4 2 3	1 2 4 3	3 2 1 4	1 4 2 3	2 3 4 1	1 4 2 3	2 4 1 3	2 3 1 4	1 4 2 3	1 3 2 4
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252
4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3	4 2 1 3
1 3 2 4	1 3 2 4	1 3 4 2	1 3 4 2	1 3 4 2	1 3 4 2	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 4 2	3 1 4 2
2 4 3 1	3 1 4 2	2 1 3 4	2 4 3 1	3 1 2 4	3 4 2 1	1 3 4 2	1 4 3 2	2 3 4 1	2 4 3 1	1 3 2 4	2 4 3 1
3 1 4 2	2 4 3 1	3 4 2 1	3 1 2 4	2 4 3 1	2 1 3 4	2 4 3 1	2 3 4 1	1 4 3 2	1 3 4 2	2 4 3 1	1 3 2 4
253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264
4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1	4 2 3 1
1 3 2 4	1 3 2 4	1 3 2 4	1 3 2 4	1 3 4 2	1 3 4 2	3 1 2 4	3 1 2 4	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2	3 1 4 2
2 1 4 3	2 4 1 3	3 1 4 2	3 4 1 2	2 4 1 3	3 1 2 4	1 3 4 2	2 4 1 3	1 3 2 4	1 4 2 3	2 3 1 4	2 4 1 3
3 4 1 2	3 1 4 2	2 4 1 3	2 1 4 3	3 1 2 4	2 4 1 3	2 4 1 3	1 3 4 2	2 4 1 3	2 4 1 3	2 3 1 4	1 4 2 3
265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276
4 3 1 2	4 3 1 2	4 3 1 2	4 3 1 2	4 3 1 2	4 3 1 2	4 3 1 2	4 3 1 2	4 3 1 2	4 3 1 2	4 3 1 2	4 3 1 2
1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 4 3	1 2 4 3	1 2 4 3	1 2 4 3	2 1 3 4	2 1 3 4	2 1 3 4	2 1 3 4	2 1 4 3	2 1 4 3
2 1 4 3	3 4 2 1	2 1 3 4	2 4 3 1	3 1 2 4	3 4 2 1	1 2 4 3	1 4 2 3	3 2 4 1	3 4 2 1	1 2 3 4	3 4 2 1
3 4 2 1	2 1 4 3	3 4 2 1	3 1 2 4	2 4 3 1	2 1 3 4	3 4 2 1	3 2 4 1	1 4 2 3	1 2 4 3	3 4 2 1	1 2 3 4
277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288
4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1
1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 4 3	1 2 4 3	2 1 3 4	2 1 3 4	2 1 4 3	2 1 4 3	2 1 4 3	2 1 4 3
2 1 4 3	2 4 1 3	3 1 4 2	3 4 1 2	2 1 3 4	3 4 1 2	1 2 4 3	3 4 1 2	1 2 3 4	1 4 3 2	3 2 1 4	3 4 1 2
3 4 1 2	3 1 4 2	2 4 1 3	2 1 4 3	3 4 1 2	2 1 3 4	3 4 1 2	1 2 4 3	3 4 1 2	3 2 1 4	1 4 3 2	1 2 3 4

図3-2 ミニNPモデルのすべての解 [(145-288)/288]

No	ma	mb	mc	md	ra	rb	rc	rd	No	ma	mb	mc	md	ra	rb	rc	rd	No	ma	mb	mc	md	ra	rb	rc	rd	No	ma	mb	mc	md	ra	rb	rc	rd	No	ma	mb	mc	md	ra	rb	rc	rd										
1	1	264	1	264	288	25	288	25	51	51	214	51	214	191	19	191	19	101	101	268	169	246	233	147	227	76	151	151	96	39	285	250	4	138	193	201	201	225	12	113	88	64	277	176	251	251	81	47	181	146	60	133	272	
2	2	257	171	252	286	145	222	29	52	52	206	123	200	189	91	167	23	102	102	203	55	256	234	33	187	86	152	152	90	63	283	249	8	114	197	202	202	218	36	110	87	71	253	179	252	252	2	257	171	145	222	29	286	
3	3	144	67	260	287	32	118	37	53	53	279	103	160	186	129	236	10	103	103	160	53	279	236	10	186	129	153	153	24	111	275	248	74	66	205	203	203	55	256	102	86	234	33	187	253	253	179	87	71	36	110	202	218	
4	4	138	193	250	285	151	96	39	54	54	212	217	150	185	243	180	20	104	104	46	109	269	235	77	72	139	154	154	18	135	271	247	82	42	207	204	204	50	280	99	85	239	9	190	254	254	173	131	68	35	116	158	221	
5	5	262	73	240	282	97	276	26	55	55	256	102	203	187	86	234	33	105	105	164	16	258	232	30	209	127	155	155	94	161	219	241	174	126	194	205	205	248	74	66	24	111	275	153	255	255	106	159	58	34	183	130	231	
6	6	137	199	226	281	175	92	40	56	56	142	62	213	188	21	120	43	106	106	159	58	255	231	34	183	130	156	156	17	143	229	242	108	38	208	206	206	123	200	52	23	189	91	167	256	256	102	203	55	33	187	86	234	
7	7	192	13	263	284	27	216	49	57	57	259	80	162	184	125	273	31	107	107	44	182	245	230	149	59	140	157	157	228	11	119	132	61	278	170	157	157	228	11	119	132	61	278	170	257	257	171	252	2	29	286	145	222	
8	8	114	197	249	283	152	90	63	58	58	255	106	159	183	130	231	34	108	108	38	208	242	229	156	7	143	158	158	221	35	116	131	68	254	173	208	208	242	108	38	17	143	229	156	258	258	105	164	16	30	209	127	232	
9	9	190	85	239	280	99	204	50	59	59	140	230	149	182	245	107	44	109	109	269	104	46	72	139	235	77	159	159	58	255	106	130	231	34	183	209	209	127	232	30	16	258	105	164	259	259	80	162	57	31	184	125	273	
10	10	186	129	236	279	103	160	53	60	60	133	272	146	181	251	81	47	110	110	202	218	36	71	253	179	87	160	160	53	279	103	129	236	10	186	210	210	121	274	28	15	261	79	168	260	260	3	144	67	32	118	37	287	
11	11	119	157	228	278	170	132	61	61	61	278	170	132	119	157	228	11	111	111	275	153	24	66	205	248	74	161	161	219	155	94	126	194	241	174	211	211	224	78	65	22	112	267	177	261	261	79	168	15	28	210	121	274	
12	12	113	201	225	277	176	88	64	62	62	213	56	142	120	43	188	21	112	112	267	177	22	65	211	224	78	162	162	57	259	80	125	273	31	184	212	212	217	150	54	20	185	243	180	262	262	73	240	5	26	282	97	276	
13	13	263	7	192	216	49	284	27	63	63	283	152	90	114	197	249	8	113	113	201	225	12	64	277	176	88	163	163	95	48	115	128	70	134	195	213	213	56	142	62	21	120	43	188	263	263	7	192	13	27	216	49	284	
14	14	136	265	178	215	223	84	41	64	64	277	176	88	113	201	225	12	114	114	197	249	8	63	283	152	90	164	164	16	258	105	127	232	30	209	214	214	51	214	51	19	191	19	191	264	264	1	264	1	25	288	25	288	
15	15	261	79	168	210	121	274	28	65	65	211	224	78	112	267	177	22	115	115	163	95	48	70	134	195	128	165	165	93	165	93	124	196	124	196	215	215	223	84	41	14	136	265	178	265	265	178	14	136	84	41	215	223	
16	16	258	105	164	209	127	232	30	66	66	205	248	74	111	275	153	24	116	116	158	221	35	68	254	173	131	166	166	89	237	83	122	266	100	198	216	216	49	284	27	13	263	7	192	266	266	100	198	122	83	166	89	237	
17	17	143	229	156	208	242	108	38	67	67	260	3	144	118	37	287	32	117	117	45	117	45	69	141	69	141	167	167	23	189	91	123	200	52	206	217	217	150	54	212	180	20	185	243	267	267	177	22	112	78	65	211	224	
18	18	135	271	154	207	247	82	42	68	68	254	173	131	116	158	221	35	118	118	37	287	32	67	260	3	144	168	168	15	261	79	121	274	28	210	218	218	119	155	94	126	194	241	211	211	224	78	65	22	112	267	177		
19	19	191	19	191	214	51	214	51	69	69	141	69	141	117	45	117	45	119	119	157	228	11	61	278	170	132	170	170	132	61	278	228	11	119	157	228	220	220	148	220	148	172	244	172	244	270	270	98	270	98	75	238	75	238
20	20	185	243	180	212	217	150	54	70	70	134	195	128	115	163	95	48	120	120	43	188	21	62	213	56	142	121	121	274	28	210	168	15	261	79	171	171	252	2	257	222	29	286	145	222	222	222	35	116	158	173	131	68	254
21	21	120	43	188	213	56	142	62	71	71	253	179	87	110	202	218	36	122	122	266	100	198	166	89	237	83	172	172	244	172	244	220	148	220	148	220	148	220	222	222	29	286	145	222	222	222	35	116	158	173	131	68	254	
22	22	112	267	177	211	224	78	65	72	72	139	235	77	109	269	104	46	123	123	200	52	206	167	23	189	91	173	173	131	68	254	221	35	116	158	174	174	126	194	241	211	211	224	78	65	22	112	267	177					
23	23	189	91	167	206	123	200	52	73	73	240	5	262	276	26	282	97	124	124	196	124	196	165	93	165	93	174	174	126	194	241	219	155	94	161	224	224	224	220	148	220	222	222	35	116	158	173	131	68	254				
24	24	111	275	153	205	248	74	66	74	74	66	205	248	75	153	24	111	125	125	273	31	184	162	57	259	80	176	176	88	64	277	225	12	613	201	177	22	112	267	224	224	78	65	22	112	267	177							
25	25	288	25	288	264	1	264	1	75	75	238	75	238	270	98	270	98	126	126	196	241	174	161	219	155	94	177	177	22	112	267	224	78	65	211	224	224	220	148	220	222	222	35	116	158	173	131	68	254					
26	26	282	97	276	262	73	240	5	76	76	233	147	227	268	169	246	101	127	127	232	30	209	164	16	258	105	177	177	22	112	267	224	78	65	211	224	224	220	148	220	222	222	35	116	158	173	131	68	254					
27	27	216	49	284	263	7	192	13	77	77	72	139	235	269	104	46	109	128	128	70	134	195	163	95	48	115	179	179	87	71	253	218	36	110	202	218	229	229	156	17	143	108	38	208	242	279	279	103	160	53	10	186	129	236
28	28	210	121	274	261	79	168	15	78	78	65	211	224	267	177	22	112	130	130	231	34	183	159	58	255	106	180	180	20	185	243	217	150	54	212	230	230	149	59	140	107	44	182	245	280	280	99	204	50	9	190	85	239	
29	29	286	145	222	257	171	252	2	79	79	168	15	261	274	28	210	121	131	131	68	254	173	158	221	35	116	181	181	251	81	47	181	146	60	133	272	272	146	60	133	272	272	146</											



図4には、図3-1と図3-2に示した解の通番(1から288)を用いて、その相互依存関係が示されている。図4の左上部の3行には、つぎのような数値の並びが表示されている。

No	ma	mb	mc	md	ra	rb	rc	rd
1	1	264	1	264	288	25	288	25
2	2	257	171	252	286	145	222	29

上に示したNo欄が2である行に示した数値の並びにおいて、先頭の2は通番、つぎの2(ma欄)は2番の解を示す。2番の解を出発点として、時計回りに $90^\circ$ 回転すると順次、257番、171番、252番の解が得られる。つぎの286番(ra欄)は、2番の解を左右に $180^\circ$ 反転して得られる解である。以下同様に、286番の解を出発点として、時計回りに $90^\circ$ 回転すると順次、145番、222番、29番の解が得られる。なお、252番の解をさらに時計回りに $90^\circ$ 回転すると、最初の2番の解に戻る。同様に29番の解をさらに時計回りに $90^\circ$ 回転すると、出発点の286番の解に戻る。

ここに示した2番の解からは、回転と反転を用いると、2番の解を含めて8種類の解が求められる。このように1つの解から、回転と反転により8種類の解を1つの小グループと考える。ミニNPモデルの解288種類すべてについて調べると、このような小グループは33個存在することが分かった。これで、288種類のうち264種類( $33 \times 8 = 264$ )のグループ化ができた。

一方、残りの24種類について調べたところ、上に述べたNo欄が2に示した性質とは異なる、つぎのような特徴が見つかった。上にも示した図4のNo欄が1である行に示した数値の並び：

「1 1 264 1 264 288 25 288 25」

において、先頭の1は通番、つぎの1は1番の解(図3-1参照)を示す。1番の解を出発点として時計回りに $90^\circ$ 回転すると順次、264番、1番、264番の解が得られる。この例から明らかなように、1つおきに同じ解の番号が表示されている。つぎの288番(ra欄)は、1番の解を左右に $180^\circ$ 反転して得られる解である。

以下同様に、288番の解を出発点として、時計回りに順次 $90^\circ$ 回

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

図5 ミニNPモデル1番の解

転すると25番、288番、25番の解が得られる。このように、1つおきに同じ解が出現するのは、図5に示すように1番の解が $4 \times 4$ の配列の中心点◎に関して点対称になっているためである。このため、時計回りに $90^\circ$ の回転を2回繰返すと、元の解と同一の解に戻る。ここに示した1番の解からは、回転と反転を用いると、1番の解を含めて4種類の解が求まる。このように1つの解から、回転と反転により派生する4種類の解を1つのグループと考える。ミニモデルの解288種類すべてについて調べると、このような性質をもつグループは6個存在することが分かった。このような点対称の性質をもつ解は、288種類の解の通番の小さい順に、1, 19, 45, 75, 93, 148の6個( $6 \times 4 = 24$ 種類)存在する。

## 5. 結 論

コンピュータを使用してNPの問題を解くためのアルゴリズムを二種類（アルゴリズムHとC）提示した。NP（ $9 \times 9$ ）のミニモデル版であるミニNPモデル（ $4 \times 4$ ）を調べたところ、その解が288種類存在することを、論理的な手法とプログラムを用いて確認した。さらに、生成されたすべての解288種類の相互依存関係を分析したところ、288種類の解は39個の小グループに分類され、39個の小グループのうち33個は1つの解から8種類の解が派生し、残りの6個のグループは1つの解から4種類の解が派生することが分かった。後者の6個のグループについては、その数値の配置が中心に関して点対称の性質をもつ特殊な配置であることが明らかにされた。

## 6. おわりに

今後はNPのフルモデル（ $9 \times 9$ ）の解の解析が課題である。

参考文献, 資料等 (NPに関連する文献, webや記事のいくつかを以下に示す)

1. <http://www.asahi-net.or.jp/~gi5j-uehr/puzzle/> 月刊・週刊ナンプレ.
2. 三沢美由紀, 脳を刺激するファミリーパズル, はまの出版, pp.190, [2002年8月30日] ISBN-89361-353-3 C0036.
3. <http://www.ic-net.or.jp/home/takaken> (コンピュータ&パズル)
4. 朝日新聞日曜版 (3週間から4週間に一度出題, ニコリ)
5. 平松敏祐, ナンブプレースの解法アルゴリズム, 第62回 (平成12年後期) 情報処理学会全国大会講演論文集 (I) 1Q-5, 179-180, 2001年3月13日.